**Flexibel visualisering i geometri - datorstött samarbetslärande**

*Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att*

* formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder, (lgr11)
* använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp,
* föra och följa matematiska resonemang, (lgr11)
* använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser. (lgr11)
* agera utifrån diskursiv och operativ figurförståelseprocess

Här erbjuds en fördjupad läsning som bakgrund till lektionsplaneringarna och de generella principer för undervisning och lärande som lektionsplaneringarna är baserade på. Lektionsserien har flera olika mål, på olika nivåer. Ett övergripande mål med modulen är att du som lärare ska utveckla din förmåga att utnyttja digital teknik i din ordinarie matematikundervisning. Ett didaktiskt mål är att skapa utforskande samtal i matematik, för att utveckla elevers resonemangsförmåga. Sen har varje lektion ett lärandemål med fokus på matematiskt innehåll, i detta fall geometri, som ligger till grund för varje lektionsplanering. Lektionerna har ingen inbördes ordning utan syftar alla till att utmana elevers tänkande kring geometriska figurer på olika sätt.

För att utveckla sin resonemangsförmåga behöver elever få chansen att granska och ifrågasätta andras resonemang, samt få sina egna resonemang granskade och ifrågasatta av andra. Att granska och ifrågasätta egna och andras resonemang är grunden i utforskande samtal i matematik. Att utveckla undersökande samtal i matematik fungerar som undervisningsperspektiv i lektionsserien. Undersökande samtal i matematik utmärks av fyra nyckelfaktorer, som sedan delas in i nivåer för att analysera och utvärdera samtalsbaserad undervisning mot. I Skolforskningsinstitutets forskningsöversikt [*Klassrumsdialog i matematikundervisningen*](http://www.skolfi.se/wp-content/uploads/2017/10/PDF_Klassrumsdialoger.pdf)benämns de fyra nyckelfaktorerna som

* Vem som ställer frågor och vilken typ av frågor som ställs.
* Vem som förklarar och motiverar matematiska idéer.
* Vem som bidrar med matematiska idéer.
* Vem som tar ansvar för lärandet och utvärderingen av matematiska resonemang.

När vi sedan tittar på nivåerna inom varje nyckelfaktor så betraktas situationer där läraren tar hela, eller det största, ansvaret för att driva samtalet framåt som en låg nivå och situationer där eleverna tar det större ansvaret som en hög nivå. I lektionsserien kommer ni att använda digitala applikationer. Tillsammans med elevuppgifter kommer dessa applikationer att användas för att få elever att bearbeta geometriska former analytiskt. De kommer även användas för att stötta eleverna i att ta ansvar för att ställa egna frågor till varandra, förklara och motivera sina matematiska idéer samt utvärdera sina och andras matematiska resonemang.

I denna modul kommer du framförallt be eleverna att utforska och resonera kring grafiska representationer av geometriska former, hädanefter kallar vi dem för figurer. Eleverna kommer också få eller själva skapa skriftliga och muntliga beskrivningar av dessa figurer. Målet är att de ska se varje figur för mer än vad som först syns i bilden. Att eleverna genom sitt utforskande, och de tillhörande samtalen, ska utveckla sin förståelse för respektive figur för att sedan kunna lösa ett problem kopplat till den. Applikationernas dynamiska möjligheter ger eleverna större möjlighet att bearbeta figurerna som stöd för sina matematiska resonemang än statiska bilder i till exempel ett tryckt läromedel. Idén om att uppfatta och förstå figurer så som det är beskrivet i kommande stycken är inspirerat av Duvals teorier om hur elever först tar sig an och sedan jobbar vidare med en figur.

När en elev först får en figur presenterad för sig, så förlitar sig denne framförallt på en perceptuell förståelse för figuren. Det som händer är att eleven ser helheten, benämner figuren och passar in den i den värld av geometriska figurer som eleven tidigare har erfarenhet av. Det är vanligt att elever stannar vid en perceptuell förståelse för en figur, alltså den snabba tolkning som görs direkt när eleven ser bilden. Kanske för att eleven inte ännu har sett exempel på eller själv erfarit hur mycket en figur kan stödja ett matematiskt resonemang även utan utskrivna mått. Det kommer vara viktigt här för dig som lärare att utmana eleverna och fördjupa det utforskande samtalet. Till exempel i första uppgiften med den streckade diagonalen (figur 1), då det redan från början blir viktigt att fastställa normen att eleverna motiverar sitt svar med ett resonemang utifrån figuren. Då krävs det att eleven ser förbi enbart rektangeln och kvartscirkeln och inte fastnar vid de utskrivna måtten och försöker räkna/mäta med hjälp av dem. Det vill säga att eleverna går mot en operativ förståelse för figuren.

Figur 1. Uppgiften består i att resonera sig fram till den streckade diagonalens längd.

En operativ förståelse innebär att eleverna kan bryta ner en figur i sina beståndsdelar, det kan till exempel handla om att se en rektangel som sina fyra sidor med räta vinklar. Det skiljer sig från en perceptuell förståelse på så sätt att den går längre en vad man kanske uppfattar vid en snabb första titt. Så i exemplet med en rektangel så skulle en perceptuell förståelse resultera i en slutsats att det är en rektangel eleven har framför sig, medans en operativ förståelse innebär att eleven också kan redogöra för rektangelns beståndsdelar och hur deras specifika sammansättning gör att figuren kan räknas som en rektangel. En operativ förståelse innebär också en förståelse för att man kan operera på dessa beståndsdelar, flytta runt och vrida på dem och även lägga till nya hjälplinjer i en figur. I Figur 1 handlar det om att (oberoende ordning):

1. Se att den krökta linjen utgör en fjärdedel av en hel cirkel, med mittpunkt i D
2. Se att de två uppmärkta sträckorna utgör radien på cirkeln
3. Se att det går att rita ut en ny diagonal DB som är lika lång som AC
4. Se att sträckan DB utgör radien på cirkeln

Att den digitala miljön är dynamisk innebär att du och dina elever kan manipulera figuren för att utforska dess egenskaper och börja bygga en operativ förståelse för figuren. I appleten som innehåller uppgift 1 kan ni dra i punkten C för att se hur det förändrar figuren och dess beståndsdelar. Det går också att klicka fram diagonalen DB. Diagonalen DB tar bort en möjlighet för eleverna att själva utveckla sin operativa förståelse, och en möjlighet för dig som lärare att se var eleverna är, så vi föreslår att ni inte klickar fram den direkt utan först senare i processen om det behövs för elevernas arbete eller om någon elev själv redan föreslagit denna hjälplinje. Sista steget är nu att eleverna ska knyta ihop dessa olika beståndsdelar med matematiska utsagor, bygga ett resonemang, vilket Duval skulle kalla att utveckla en diskursiv förståelse.

En diskursiv förståelse kräver att eleverna kan associera delar eller helheten i en figur med påståenden om figuren på ett sammanhängande vis. Det kan också innebära att eleverna drar slutsatser som går utanför figuren på ett mer generellt plan. I Figur 1 innebär det koppla ihop 1-4 i listan ovan för att motivera påståendet att den streckade diagonalen är 10cm. Till exempel ”Eftersom sträckan DB är lika lång som AC, och vi vet att sträckan DB är 10cm eftersom det är radien på cirkeln, så vet vi att sträckan AC är 10cm”.

Samtliga uppgifter och lektioner i modulen syftar till att utveckla elevernas förmåga att resonera utifrån operativ och diskursiv förståelse genom att jobba med utforskande samtal kring varje uppgift. Att uppgifterna är av utforskande karaktär, alltså elevcentrerade och öppna, är en förutsättning. Du har som uppgift att skapa förutsättningar för att eleverna ska ta mer ansvar inom de fyra nyckelfaktorerna beskrivna tidigare. Det kommer handla mycket om att ge eleverna exempel på hur man kan formulera ett resonemang i tal eller skrift, och det handlar också om att ge exempel på hur man kan ifrågasätta och efterfråga förtydliganden i andras resonemang. Men det handlar också mycket om att få eleverna att utnyttja de möjligheter de digitala miljöerna erbjuder för att skapa en förstärkt undervisningssituation.

I modulen är det framförallt två verktyg som lyfts fram, dels geometri-applikationen i Geogebra och dels kommunikationsverktyget Padlet. Geometri-applikationen har, som tidigare nämnts, framförallt i uppgift att skapa en miljö för utforskande. De är skapade för att eleverna ska kunna manipulera figurer, leta samband och testa ytterligheter. Till exempel i lektion 2, där eleverna ska skapa förståelse för hur man kan se formeln för triangelns area på olika sätt, antingen som halva basen multiplicerat med höjden eller halva höjden multiplicerat med basen. Geometri-applikationen är då skapad med avsikt att eleverna ska få hjälp med den operativa förståelsen genom att den hjälper till att omforma figuren utifrån olika perspektiv och skapa hjälplinjer som markerar viktiga beståndsdelar i de olika figurerna. Det är också viktigt att eleverna kan dra i hörnen för att utforska hur det blir med andra typer av trianglar. Här ger den dynamiska miljön fördelar som en papper-och-penna uppgift inte har, just att eleven snabbt kan skapa och utforska alla tänkbara trianglar. Just den egenskapen, att snabbt kunna testa idéer utan särskild ansträngning, utnyttjas även i tredje lektionen. Där tränas elevernas operativa förmåga ytterligare genom att de ombeds skapa nets. Nets är en nedbrytning från tre dimensioner till två av geometriska kroppar, en utvikning av en tredimensionell figur till en tvådimensionell mall. Här kan eleverna testa olika sätt att sätta ihop de tvådimensionella figurer de identifierat att den tredimensionella kroppen (växthuset) har på olika sätt utan att behöva sudda eller börja om med tidskrävande ritande för hand.

Padlet[[1]](#footnote-1) kan beskrivas som en anslagstavla online där du kan bjuda in eleverna att skriva egna inlägg som du och andra elever kan se omedelbart. Eleverna behöver inte skapa någon användare för att få tillgång, utan behöver bara länken till rätt padlet. I klassrummet är det tänkt att du ska använda padlet för att tillgängliggöra elevers resonemang för övriga i klassen. När det är dags att samla ihop för helklassdiskussion i lektion 2, när eleverna jobbat med triangel 1, så har du påståenden på padleten som ni kan starta diskussionen i. Om eleverna redan har tränat på att ställa relevanta matematikfrågor till varandra är detta tillfälle att be dem läsa varandras inlägg i padlet och förbereda sådana frågor, annars leder du diskussionen genom exempel och ber elever som är författare till olika inlägg att förklara närmre hur de har resonerat.

Under och efter varje lektion:

* Spegla din egen undervisning i de fyra nyckelfaktorerna med betydelse för hur samtalsmönster gestaltar sig.
  + Vem är det som ställer frågor och vilken typ av frågor ställs i din matematikundervisning?
  + Vem förklarar och motiverar matematiska idéer i din matematikundervisning?
  + Vem bidrar med matematiska idéer i din matematikundervisning?
  + Vem tar ansvar för lärandet och utvärderingen av matematiska resonemang i din matematikundervisning?
  + Vad kan du förändra så att matematiksamtalen lyfts till en högre nivå?
  + I lektion 1 erbjöds du ett antal frågor att använda vid helklassdiskussionen, återanvändes den typen av frågor i lektion 2 och 3 av dig och/eller elverna? Varför/varför inte?
* Hur utnyttjar ni de dynamiska geometri-applikationerna för att bygga operativ förståelse?
  + Hur stimulerade lektionen eleverna att utforska figurerna grundligt?
  + Hur använde eleverna figurerna för att stödja sina resonemang?
  + Vilken betydelse fick de dynamiska egenskaperna i geometri-applikationerna för att utveckla elevernas förståelse för figurerna?
* Uppstod det några kritiska situationer där lektionen stannar upp? Vad orsakade dessa situationer? Hur kan du undvika dem i framtiden?

1. För mer information om padlet och lämpliga inställningar, klicka på länken XXX. Om ni använder program med liknande egenskaper så kan ni såklart använda dessa istället. [↑](#footnote-ref-1)