**Mönster och undersökande samtal i matematik med stöd av digitala responssystem**

*Centralt innehåll åk 4–6*

* Hur mönster i talföljder och geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.
* Obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol.
* Enkla algebraiska uttryck och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven.
* Strategier för problemlösning i vardagliga situationer.

*Centralt innehåll åk 7–9*

* Hur mönster i talföljder och geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas generellt.
* Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer.
* Strategier för problemlösning i vardagliga situationer och inom olika ämnesområden samt värdering av valda strategier och metoder.

Här erbjuds en fördjupad läsning som bakgrund till lektionsplaneringarna och de generella principer för undervisning och lärande som lektionsplaneringarna är baserade på. Lektionsserien har flera olika mål, på olika nivåer. Ett övergripande mål med lektionsserien är att du som lärare ska utveckla din förmåga att utnyttja digital teknik i din ordinarie matematikundervisning. Ett didaktiskt mål är att skapa utforskande samtal i matematik, för att utveckla elevers resonemangsförmåga. Sen har varje lektion ett lärandemål med fokus på matematiskt innehåll, som ligger till grund för varje lektionsplanering.

För att utveckla sin resonemangsförmåga behöver elever få chansen att granska och ifrågasätta andras resonemang, samt få sina egna resonemang granskade och ifrågasatta av andra. Att granska och ifrågasätta egna och andras resonemang är grunden i utforskande samtal i matematik (referens?). Att utveckla undersökande samtal i matematik fungerar som undervisningsperspektiv i lektionsserien. Undersökande samtal i matematik utmärks av fyra nyckelfaktorer, som sedan delas in i nivåer för att analysera och utvärdera samtalsbaserad undervisning mot. I Skolforskningsinstitutets forskningsöversikt [*Klassrumsdialog i matematikundervisningen*](http://www.skolfi.se/wp-content/uploads/2017/10/PDF_Klassrumsdialoger.pdf)benämns de fyra nyckelfaktorerna som

* Vem som ställer frågor och vilken typ av frågor som ställs.
* Vem som förklarar och motiverar matematiska idéer.
* Vem som bidrar med matematiska idéer.
* Vem som tar ansvar för lärandet och utvärderingen av matematiska resonemang.

När vi sedan tittar på nivåerna inom varje nyckelfaktor så betraktas situationer där läraren tar hela, eller det största, ansvaret för att driva samtalet framåt som en låg nivå och situationer där eleverna tar det större ansvaret som en hög nivå. De digitala verktygen och uppgifterna som används i lektionsserien syftar alltså till att underlätta för eleverna att ta ansvar för att ställa egna frågor till varandra, förklara och motivera sina matematiska idéer samt utvärdera sina och andras matematiska resonemang. Det blir din uppgift som lärare att skapa förutsättningar, visa genom exempel och befästa normer i klassrummet.

**Lärarens roll**

Traditionellt så har lärarens roll varit kunskapsförmedlaren, en person som ska överföra sin kunskap i matematik till sina elever. På senare tid har andra perspektiv fått mer utrymme, där elever snarare ska utveckla sina förmågor att resonera och kommunicera matematiskt. Läraren ska då istället skapa förutsättningar för att sådan utveckling kan ske genom att utmana elever med problem, ställa frågor och ge elever utrymme att testa sina resonemang gentemot läraren och sina klasskamrater. I denna del kommer vi att fokusera på hur du kan ställa frågor samt vilka normer i klassrummet som är gynnsamma för en sådan undervisning.

Att ställa frågor är en konst som har studerats ingående inom både matematikdidaktisk forskning och andra områden. De kan till exempel vara på olika form, och ha olika syften. En kontrollfråga formuleras inte på samma sätt som en utvecklande fråga, eller en som syftar till att den svarande ska ta ställning. Det har visats vara lätt som matematiklärare att fastna i kontrollfrågor och slutna frågor som är knutna till en lärarroll som kunskapsförmedlaren, där eleverna endast avkrävs ett mycket kort svar innan läraren tar över ordet igen. Inom perspektivet med utforskande samtal i matematik så har frågorna en dubbel roll, de ska både leda samtalet framåt och samtidigt vara en förebild för hur eleverna själva kan ställa frågor när de förväntas att mer och mer ta över ansvaret för de matematiska idéerna. Det är då viktigt att frågorna är av en karaktär som är gynnsam för framtida utforskande samtal i matematik. De tre frågetyper som framförallt lyfts fram inom matematikdidaktisk forskning är *framkallande*, *stöttande*, och *fördjupande* frågor. Syftet med framkallande frågor är att få in elever i samtalet, utmana dem att bidra. Ofta innehåller uppgifter frågor av denna typ, men det går också att ställa dem i en diskussion. Framkallande frågor kan vara på formen att uppmana en elev att dela med sig av sitt resonemang (t.ex. ”hur tänker du här?”), uppmana elever att försöka lösa en uppgift på ett annat sätt eller att uppmana elever att själva formulera en idé eller fråga som får diskussionen att fortsätta en bit till (t.ex. ”kan du formulera en fråga till Aina så gör att du förstår hennes resonemang bättre?”). Stöttande frågor syftar till att stötta elevers resonemang genom att fylla i luckor, ge tips och ställa frågor som hjälper elever att själva hitta framåt. Det kan vara på formen att injicera en idé implicit i en fråga, till exempel om eleven har fastnat på ett problem där hen ritat in ett antal vinklar i figuren så skulle en stöttande fråga kunna vara ”Hur tänker du att yttervinkelsatsen kan hjälpa dig i detta problemet?”. Det kan också vara på formen att få eleven att fortsätta prata och utveckla sitt resonemang, till exempel med frågorna ”kan du ge ett exempel?” eller ”Varför gör du så?” istället för att erbjuda ett lösningsförslag på en gång. Fördjupande frågor ska fördjupa en elevs resonemang, utmana den att ta det ett steg vidare. Det kan handla om att ifrågasätta ett resonemang, till exempel ”hur vet du att det stämmer?” eller ”hur säker är du på ditt svar?”. Du kan också föra in ett alternativ resonemang eller motsägande exempel, till exempel genom ”Tänk om…”. [REF till fördjupad läsning]

Att jobba med olika frågetyper är särskilt viktigt i lektion 1, då det är du som lärare som bestämmer tempo och fokus tydligare än i de senare två lektionerna. Du ska jobba mot helklassdiskussioner där eleverna själva tar ansvar för att ställa frågor och skapa de matematiska förklaringarna. Till exempel i uppgift 4 är det risk att själv ta över förklaringsansvaret efter att eleverna publicerat sina svar. Vi är vana att leda helklassdiskussioner genom att ställa olika elevlösningar emot varandra och förklara hur de skiljer sig åt. Här blir det en utmaning att använda de olika frågetyperna för att ge eleverna utrymme att göra det jobbet. Du blir samtidigt det goda exemplet, som visar vilken typ av frågor vi förväntar oss att eleverna ska fråga sig själva och varandra. Lektion 2 är utformat så att eleverna ska känna att det är naturligt att ta mer plats, eftersom det är de som är producenter av materialet de jobbar med. Genom att skriva upp några förslag på tavlan hur de kan inleda en fråga till varandra påminner du smidigt hur du brukar formulera dig. Utgå ifrån frågetyperna i föregående avsnitt för att skapa exempel på formuleringar som passar just din lektion. Det är därför viktigt att också tänka på att det i lektion 1 också handlar om att skapa regler och ramar för samtalet, samt vad som förväntas av eleverna framöver, så kallade normer.

För att det utforskande samtalet ska nå en högre nivå, där eleverna tar större ansvar för att producera de matematiska resonemangen, behöver de klassrumsnormer som råder tillåta och uppmana detta. För dig som lärare handlar det mycket om att vänta in eleverna på olika sätt. Det kan t.ex. handla om att du under pardiskussionerna i lektion 1 inte korrigera elever som kanske är lite snett ute i sina resonemang, utan istället väntar till helklassdiskussionen där sådana resonemang kan utgöra ett viktigt bidrag i det utforskande samtalet. Det handlar också om att inte vara för snabb i helklassdiskussionerna, varken i lektion 1,2 eller 3, med att ge din tolkning av problemet. Det har nämligen visats, bland annat i arbetet med framtagandet av lektionerna, att elever ibland behöver märka själva att läraren lägger över ansvaret att lösa uppgiften på eleverna och tänker inte servera en lösning bara för att eleverna inte hinner hela vägen fram. Om eleverna inte löser uppgiften, blir uppgiften inte löst. Är eleverna dessutom ovana vid att delta i helklassdiskussioner behöver de extra tid av den anledningen. Så förbered dig på att tillåta vissa moment att ta tid, och börjar lektionstiden ta slut, bryt hellre än att skyndsamt gå igenom en lösning själv.

**Den digitala tekniken**

Den digitala tekniken i denna lektion innefattar både mjukvara och hårdvara. Hårdvaran är de enheter eleverna använder, din egen enhet samt den teknik som används för att projicera en bild i klassrummet (t.ex. en projektor eller interaktiv skrivtavla). Mjukvaran i modulen är socrative, som är det responssystem som föreslås, padlet, som är det delningsverktyg som föreslås och geogebra, som är den dynamiska laborativa miljön som föreslås. Denna hårdvara och mjukvara utnyttjas utifrån 3 generella principer som du kan överföra i andra matematik-undervisningssammanhang.

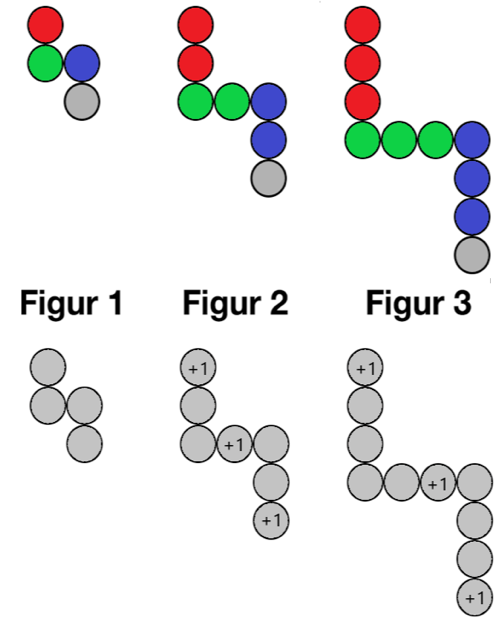
Den första principen är att utnyttja tekniken för att göra elevers resonemang tillgängliga för hela klassen, vilket också är en förutsättning för utforskande samtal i matematik. Responssystemet tillåter att eleverna tar ställning, men också att de blir varse om andras tolkningar. Använd det faktum att eleverna fått insyn i varandras resonemang i lektion 1 genom att skifta mellan helklass och pardiskussioner. Om resultatet i till exempel fråga 5 visar att eleverna inte är överens, låt då frågan gå ut igen i paren som ett verktyg för att skapa utforskande samtal i grupperna och för att förbereda för utforskande samtal i helklassdiskussionen. När uppgifter och resultat projiceras upp så alla kan se dem, öppnas det också upp för att använde dessa bilder för att ytterligare göra elevers resonemang tillgängliga. Utnyttja tillfället i till exempel uppgift 5 eller 6 i lektion 1 till att bjuda upp olika elever till tavlan för att peka och förklara i bilderna hur de har resonerat. Att det är okej att elever tar plats i klassrummet på det viset kan snabbt bli en norm ni får nytta av i kommande två lektioner i serien och i matematikundervisningen generellt.

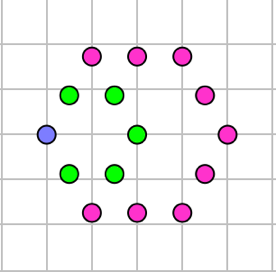
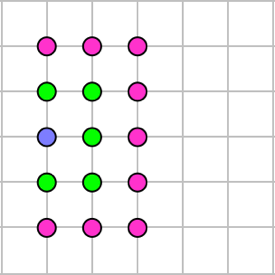
Den andra principen är att utnyttja tekniken för att manipulera objekt. I lektion 1 och 3 handlar det om möjligheten att flytta runt prickar och lägga dessa på olika sätt. Tekniken möjliggör då ett snabbt och enkelt sätt att omforma mönster och testa olika idéer. I samtliga lektioner finns också möjligheten att växla mellan den digitala och analoga miljön, genom att kombinera bilden från projektorn med att rita, ringa in och färglägga med pennor. Här kan flera elever efter varandra bjudas fram till tavlan och rita och enkelt sudda om det behövs. Till exempel i lektion 2 är det lämpligt att bjuda fram elever att visa i varandras figurer hur de arbetat för att ta fram algebraiska uttryck, och hur dessa uttryck kan motiveras, till exempel genom att visa hur mönstret växer, eller hur de kan hitta visuella strukturer i varje figur.

Den tredje principen är att utnyttja tekniken för att växla mellan helklassarbete och grupparbete. Grupparbete och helklassarbete ska växelverka i lektionen, för att skapa bästa möjligheter för utforskande samtal både i mindre grupper och i helklass. Eftersom varje del i lektionerna är tillgänglig både centralt via projektorn och på elevernas egna enheter, ger tekniken en möjlighet att förbereda elever för helklassdiskussion när de kan peka och klicka i sina egna figurer. Använd den möjligheten för att förbli flexibel i lektionen, istället för att linjärt följa enskilt-par-alla-mönster kan du skifta flera gånger mellan par och alla för att skapa de bästa möjliga förutsättningarna för ett utforskande samtal i matematik där många elever har relevanta resonemang de vill dela med sig utav.

**Det matematiska innehållet**

Vi vet att det är svårt att skriva generella algebraiska uttryck, särskilt för mönster som inte bygger på aritmetiska talföljder som karakteriseras av att ökningen är konstant. Vi vet att elever tenderar att resonera på ett fåtal olika vis, och uppgifterna är utformade så att de utmanar resonemang och strategier som bara fungerar i vissa fall. Ett sådant exempel på elevresonemang är additiva kontra multiplikativa resonemang. I lektion 1 kan du vara förberedd på att flera elever kommer resonera utifrån en additiv strategi, där de gör upprepad addition för att ta reda på hur många prickar det finns i figur 9 i fråga 2 (…3+3+3+3 osv utifrån någon startfigur). Denna typ av uppgift kallas för *närliggande* generalisering, och har som syfte att bekanta eleverna med hur mönstret fungerar. Den är också bra på att få med elever som tycker det är svårt att förutse mönster, men här har de chansen att ändå föra sitt resonemang och diskussionen framåt. Du följer sedan upp denna uppgiftstyp med en *avlägsen* generalisering. Här blir det inte längre rimligt att fortsätta med ett additivt resonemang utan kräver att eleverna resonerar i termer av multiplikation (proportionalitet) dvs. hur många additioner som behövs av den konstanta ökningen och sedan multiplicera ökningen med antalet additioner (*n*⋅3 där *n* får stå för antalet additioner av 3 som krävs för att bestämma antalet pricka i figur *n*). Ett multiplikativt resonemang är grunden för att skriva ett generellt algebraiskt uttryck.

Multiplikativa resonemang kan se olika ut beroende på hur eleven tolkar vad *n* står för. Fråga 4 i lektion 1 öppnar upp för den diskussionen, där *n* kan tolkas på olika vis. Som tidigare nämnts så kan *n* stå för antalet figurer som finns mellan två godtyckligt utvalda figurer för att få fram hur många additioner som kommer krävas. Det kan också stå för figurens nummer. Ett tredje alternativ är att *n* går att se som en *enhet* i en figurs visuella struktur. Den typen av visuella strukturresonemang har potential att bli ett verktyg för att även generalisera mönster som bygger på andra typer av talföljder, så som kvadrattalen i lektion 2. Figuren till höger visar hur du kan skilja mellan de olika sätten att konstruera det algebraiska uttrycket. I det övre fallet står färgerna röd, grön och blå för en visuell enhet i termer av *n*. Ett uttryck utifrån det övre resonemanget skulle inledningsvis skrivas som *n*+*n*+*n*+1. Det undre fallet visar istället hur mönstret växer för varje steg, i detta fall med 3 prickar, och premierar resonemanget *n*⋅3 som en startpunkt för att skriva ett uttryck. Båda fallen kommer eleverna antagligen förenkla till 3*n*+1 till slut, vilket är intressant utifrån sociomatematiska normer som kommer styra in eleverna mot att det är det bästa sättet att skriva på. Uppgift 5–7 i lektion utmanar elever att förstå visuella strukturresonemang som i det övre fallet i bilden. Du gör det för att de kommer behöva den typen av resonemang för att lösa och kunna kommunicera sitt resonemang när de skriver uttryck för kvadrattalen och de hexagonala talen i lektion 2 och 3.

I lektion 3 tas detta med visuella strukturresonemang ännu ett steg längre. Där uppmanas eleverna att först strukturera om, eller transformera, det visuella mönstret utan att det påverkar den bakomliggande talföljden. När eleverna har skapat en enklare form fortsätter arbetet med att identifiera visuella strukturer baserat på *n*. Bilderna till höger visar exempel på hur figur tre i det hexagonala mönstret kan se ut, med originalformen till vänster och den transformerade figuren till höger. I den rektangulära figuren kan eleverna sedan identifiera *n* i basen och höjden av rektangeln på olika sätt. Då basen är *n* lång, och höjden går att beskriva som 2*n*-1 så blir det generella uttrycket *n*(2*n*-1) eller 2*n*2-n.

Under och efter varje lektion:

* Spegla din egen undervisning i de fyra nyckelfaktorerna med betydelse för hur samtalsmönster gestaltar sig.
  + Vem är det som ställer frågor och vilken typ av frågor ställs i din matematikundervisning?
  + Vem förklarar och motiverar matematiska idéer i din matematikundervisning?
  + Vem bidrar med matematiska idéer i din matematikundervisning?
  + Vem tar ansvar för lärandet och utvärderingen av matematiska resonemang i din matematikundervisning?